IV. EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS

Seguiremos estudiando solamente los sistemas de fuerzas en el plano. Lo primero que debemos decir es que un sistema de fuerzas está en equilibrio si su resultante es nula, es decir, que los efectos externos que sufre un cuerpo son los mismos si está sujeto a ese sistema o no está sujeto a ninguna fuerza en absoluto. Las ecuaciones analíticas que deberá cumplir ese sistema son las tres siguientes:

$$\sum Fx = 0\ ,\ \sum Fy = 0\ \text{ y }\ \sum MoF = 0$$

Manifestaciones del equilibrio de un cuerpo

Antes de pretender investigar si un sistema de fuerzas satisface las ecuaciones de equilibrio, es necesario observar las condiciones mecánicas del cuerpo para saber si, efectivamente, se encuentra en estado de equilibrio o no.

Cuando estudiamos la primera ley de Newton vimos que tanto un cuerpo en reposo como uno que se mueva en línea recta con velocidad constante están en equilibrio. Pero además de estas dos, hay otras dos condiciones que muestran que el cuerpo está en equilibrio: la rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje fijo que pasa por su centro de masa, y la rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje que contiene su centro de masa, el cual se mueve en línea recta con velocidad constante. Estas dos últimas manifestaciones quedarán demostradas una vez que estudiemos la Cinética de los cuerpos rígidos.

Es decir, las manifestaciones del equilibrio de un cuerpo son cuatro:

1. *El reposo*. Por ejemplo, los pupitres del aula, el edificio de la Facultad, el ángel de la independencia. ([1])

2. *El movimiento rectilíneo uniforme*. Un ejemplo sería un carro del metro que se moviera en un tramo recto de vía con una velocidad constante de 80 kilómetros por hora.

3. *La rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje fijo que pase por su centro de masa*. Por ejemplo, el impulsor de una bomba de agua que gira a 600 revoluciones por minuto, o la polea de una máquina que gire con una velocidad angular constante.

4. *La rotación uniforme de un cuerpo alrededor de un eje que contenga su centro de masa, el cual se mueva en línea recta con velocidad constante*. Pongamos por ejemplo la rueda de un automóvil, que se mueva con rapidez constante en una carretera recta.

Si un cuerpo no se encuentra en alguna de estas cuatro condiciones, no puede estar en equilibrio.

Problemas isostáticos y problemas hiperestáticos

Dijimos arriba que un sistema de fuerzas en equilibrio debe satisfacer las siguientes tres ecuaciones: $\sum Fx = 0, \sum Fy = 0$ y $\sum MoF = 0$. Pero será imposible resolver un problema de Estática en el que aparezcan cuatro incógnitas.

Se llaman problemas isostáticos aquéllos cuyo número de incógnitas es igual o inferior al número de ecuaciones de equilibrio disponibles. Son hiperestáticos los que tienen un número de incógnitas mayor que el de ecuaciones de equilibrio disponibles. La Estática sólo se ocupa de problemas isostáticos.

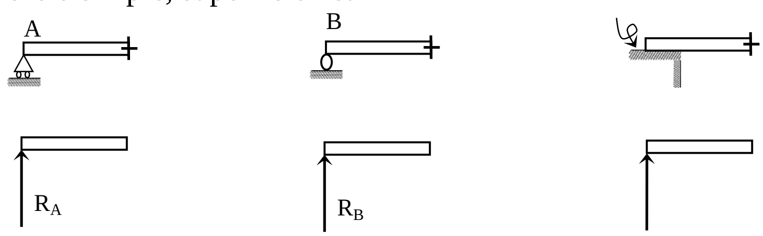
([1]) Se recomienda al lector revisar la nota ([4]) del primer capítulo, en la que hablamos del reposo.

Apoyos usuales

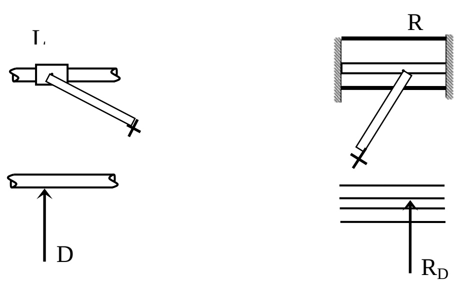
Aunque las formas de conectar los cuerpos entre sí son innumerables, existen ciertos tipos de apoyos o conexiones entre un cuerpo y su entorno que resultan de especial interés para nuestro curso. Los agruparemos según el número de incógnitas que ocultan.

Apoyos que ocultan una sola incógnita

Apoyo libre o simple, superficie lisa

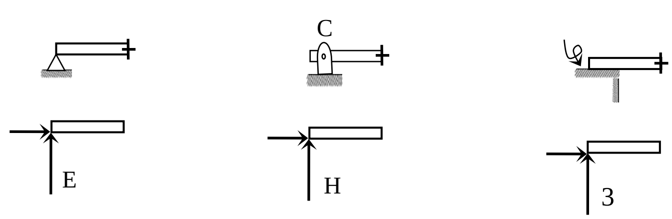


Collarín en varilla lisa. Perno en ranura lisa



Apoyos que ocultan dos incógnitas

Apoyo fijo, articulación, superficie rugosa.

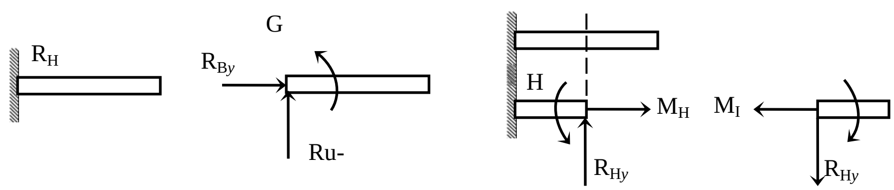


La dirección de las reacciones en estos apoyos es desconocida. En vez de trabajar con la magnitud y la dirección como incógnitas, se suele recurrir a la resolución de las reacciones en sus componentes cartesianas, lo cual facilita generalmente el planteamiento de los problemas.

La reacción de las superficies rugosas se descompone casi siempre en una componente perpendicular (o normal) a la superficie y en otra tangencial o fuerza de fricción. De ahí la letras con que se designa la magnitud de esas componentes en el diagrama. Las superficies lisas son incapaces de ejercer esta fuerza de fricción.

Apoyos que ocultan tres incógnitas

Empotramiento y sección de un cuerpo



Diagramas de cuerpo libre

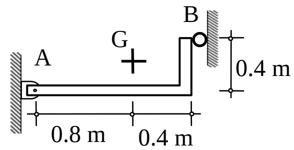
El instrumento más importante con el que debemos contar para la resolución de problemas tanto de Estática como de Cinética (es decir, de aquéllos en los que intervienen fuerzas), es el diagrama de cuerpo libre. Su grande importancia radica en que las leyes de Newton, puesto que se refieren a fuerzas externas, se cumplen en cuerpos o en sistemas de cuerpos separados de los que actúan sobre ellos: si no se conocen con claridad los límites del cuerpo en estudio, es imposible determinar las fuerzas externas que puedan alterar su estado.

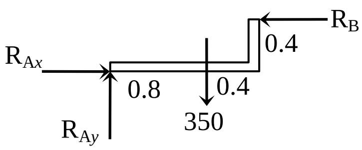
El diagrama de cuerpo libre es un dibujo de un cuerpo aislado y de las fuerzas externas que actúan sobre él.

Conviene recordar que las fuerzas externas son aquellas que otros cuerpos ejercen sobre el cuerpo en estudio.

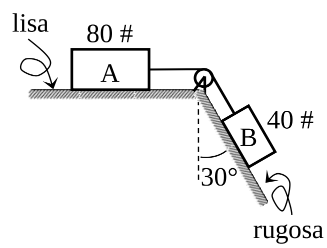
Aunque conforme vayamos resolviendo problemas de equilibrio iremos adquiriendo práctica en la elaboración de los diagramas de cuerpo libre, daremos a continuación algunos ejemplos.

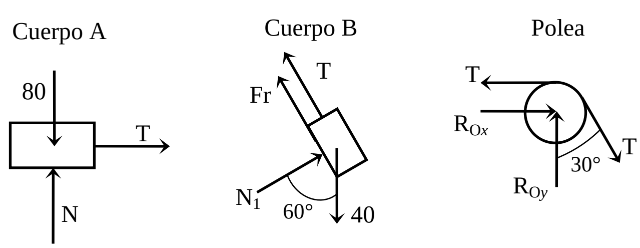
Ejemplo. La barra de la figura pesa 350 kg y su centro de gravedad es el punto *G*. Está articulada en el extremo *A* y libremente apoyada en *B*. Dibuje su diagrama de cuerpo libre.



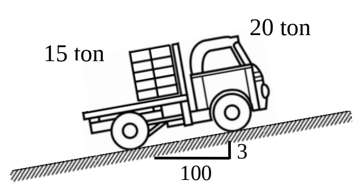


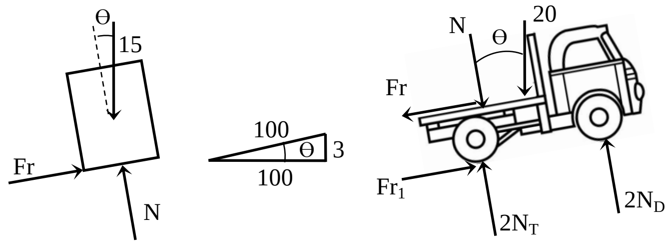
Ejemplo. El cuerpo *A* de la figura se encuentra sobre una superficie lisa, mientras que *B* se halla en una rugosa. La cuerda que los une pasa por una polea. Suponga que tanto la cuerda como la polea son ideales; es decir, que la cuerda tiene masa despreciable y es inextensible, y que la polea, además de tener masa despreciable, puede girar sin fricción alrededor del perno. Dibuje los diagramas de cuerpo libre de *A*, *B* y la polea.





Ejemplo. El camión de la figura pesa 20 ton y la caja que transporta, 15. El camión asciende por una pendiente del 3 %. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la caja y otro del camión.



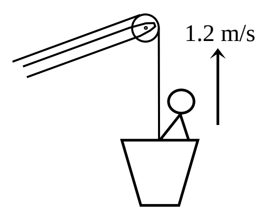


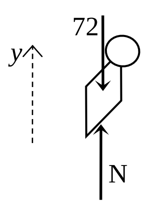
Equilibrio de los sistemas de fuerzas colineales

Para determinar completamente la resultante de un sistema de fuerzas colineales basta emplear la ecuación R = ΣF. Si el sistema de fuerzas está en equilibrio, entonces la ecuación que debe cumplirse es ΣF = 0.

Puesto que se dispone de una sola ecuación de equilibrio, en un problema isostático sólo podrá aparecer una incógnita, tal como se aprecia en los siguientes ejemplos.

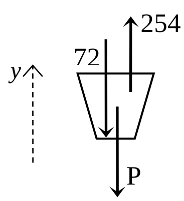
Ejemplo. Una grúa levanta a un trabajador de la compañía de luz, metido dentro de una canastilla, con una velocidad constante de 1.2 m/s. Si se sabe que el trabajador pesa 72 kg y que la tensión de la cuerda es de 254 kg, ¿cuál es el peso propio de la canastilla?





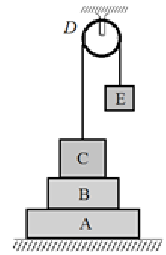
$$\sum F_y = 0$$
$$N - 72 = 0$$
$$N = 72$$

Canastilla



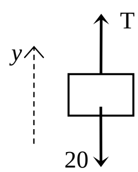
$$\sum F_y = 0$$
$$254 - 72 - P = 0$$
$$\boxed{P = 182\ kg}$$

Ejemplo. Tres cajas, *A*, *B* y *C*, de 120, 90 y 60 lb de peso cada una, respectivamente, están apiladas. El cuerpo *E* pesa 20 libras, de modo que la cuerda jala la caja *C* hacia arriba con una fuerza de 20 libras. Para esta condición, calcule todas las fuerzas externas que actúan sobre cada uno de los cuatro cuerpos.



Dibujamos los diagramas de cuerpo libre y observamos la tercera ley de Newton: la acción de A sobre B es igual a la de B sobre A, pero de dirección contraria, etc.

Cuerpo E

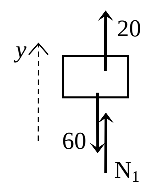


$\Sigma F y = 0$

$T - 20 = 0$

$T = 20$ lb

Cuerpo C

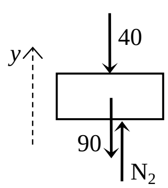


$\Sigma F y = 0$

$N_1 + 20 - 60 = 0$

$N_1 = 40$ lb

Cuerpo B

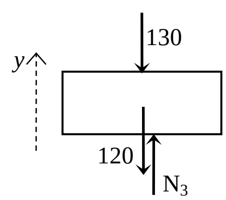


$\Sigma F y = 0$

$N_2 - 90 - 40 = 0$

$N_2 = 130$ lb

Cuerpo A

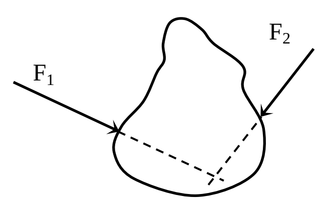


$\Sigma F y = 0$

$N_3 - 130 - 120 = 0$

$N_3 = 250$ lb

Teorema del cuerpo sujeto a dos fuerzas

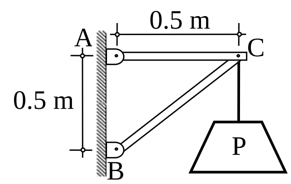


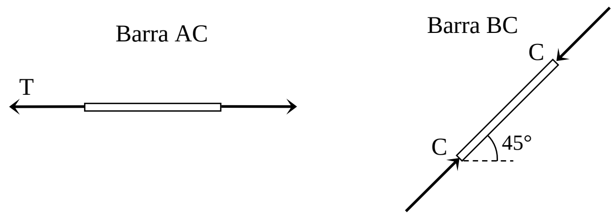
Pensemos en un cuerpo sujeto a dos fuerzas de la misma magnitud, pero de direcciones arbitrarias, como se muestra en la figura. Es evidente que el sistema de fuerzas no está en equilibrio, puesto que, colocada una a continuación de la otra, se requiere de una fuerza más que vaya del origen de la primera a la punta de la segunda. Partiendo de este hecho, puede concluirse el siguiente teorema:

Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a dos fuerzas, tales fuerzas son de la misma magnitud, colineales y de sentido contrario.

Este teorema se aplica en muchísimos casos, pero son de especial interés los de las cuerdas y los de barras de peso despreciable que están articuladas sus dos extremos.

Ejemplo. La ménsula de la figura soporta un gran peso P, de modo que los pesos propios de las barras son despreciables. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de cada una de ellas.





Tensión y compresión

La barra *AB* de la ménsula del problema anterior se podría sustituir por una cuerda, un cable o una cadena y se conseguiría el mismo resultado de soportar la carga *P*. En cambio, no se puede sustituir así la otra barra. La razón es que la barra *AB* está ejerciendo una tensión, mientras que la *BC* está sujeta a compresión.

Se llama tensión (o tracción) a la fuerza que trata de alargar la longitud de un cuerpo; compresión, a la que trata de acortarla. (También se llaman tensión y compresión los esfuerzos que soportan esos cuerpos por la acción de las respectivas fuerzas.) ([2])

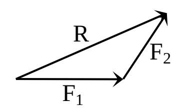
([2]) Si se toma una parte arbitraria de una cuerda o de una barra sujeta a dos fuerzas, podemos apreciar que en cualquier sección actúa una tensión o una compresión que siempre es de la misma magnitud.

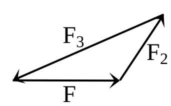
Equilibrio de los sistemas de fuerzas concurrentes

El estudio de las resultantes de los sistemas de fuerzas concurrentes lo hemos dividido en dos partes: primero estudiamos el caso de sistemas de sólo dos fuerzas, luego de más de dos. Ahora dividiremos el tema del equilibrio también en dos: la primera parte se referirá a cuerpos sujetos a tres fuerzas, las segunda, a más de tres fuerzas.

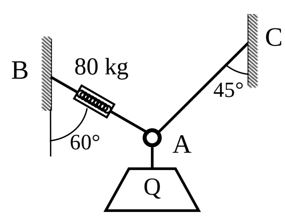
A) Equilibrio de cuerpos sujetos a tres fuerzas concurrentes

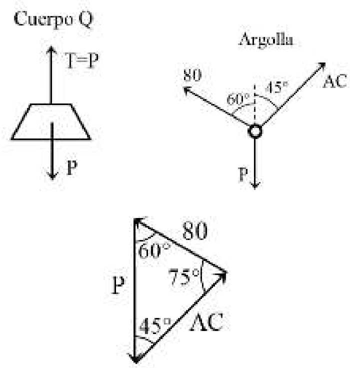
Para determinar la resultante de dos fuerzas concurrentes hemos empleado la ley del triángulo: colocábamos una fuerza a continuación de otra y la resultante unía el origen de la primera con la punta de la segunda. Para que el sistema original de dos fuerzas quede en equilibrio, bastará añadirle una fuerza igual a la resultante, pero de sentido contrario. En el triángulo, basta colocar a continuación de la segunda fuerza una tercera que llegue al origen de la primera. Así tendremos un triángulo cerrado. Utilizando las leyes de senos y cosenos, los problemas de equilibrio de cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver con suma facilidad, como en los ejemplos siguientes.





Ejemplo. Sabiendo que el dinamómetro de la figura marca 80 kg, determine el peso del cuerpo *Q* y la tensión en la cuerda AC.





Ley de senos

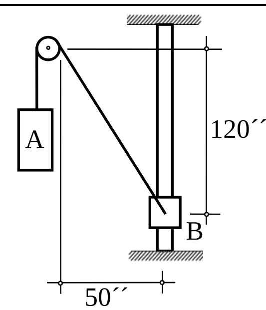
$$\frac{80}{sen\ 45} = \frac{P}{sen\ 75} = \frac{AC}{sen\ 60}$$

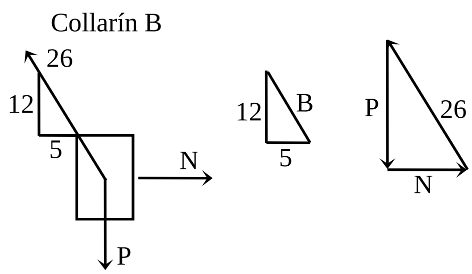
$$P = \frac{80}{sen\ 45} sen\ 75$$

$$\boxed{P = 109.3\ kg}$$

$$\boxed{AC = 98\ kg}$$ (3)

Ejemplo. Los cuerpos mostrados están en reposo. El cilindro *A* pesa 26 lb. Calcule el peso del collarín *B*, sabiendo que la barra vertical es lisa.

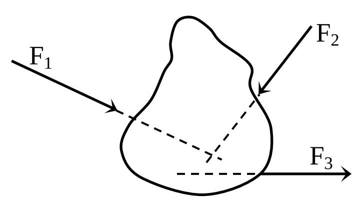




$$\frac{P}{12} = \frac{26}{13}$$

$$\boxed{P = 24\ lb}$$

Teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas



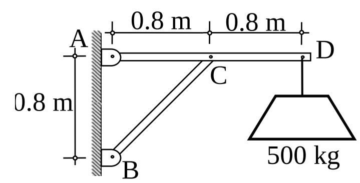
Imaginemos un cuerpo sujeto a tres fuerzas, dos de las cuales concurran en un punto, como se muestra en la figura.

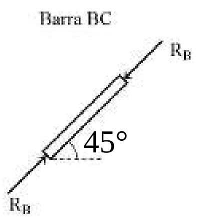
(3) La primera respuesta está redondeada la cuarta cifra significativa porque comienza con 1. La segunda respuesta, a la tercera. En el prefacio hablamos de esta forma de dar las respuestas.

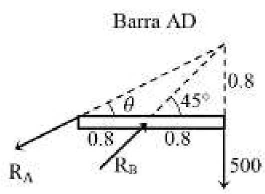
La tercera fuerza, cuya línea de acción no pasa por dicho punto, produce cierto momento con respecto a él, lo cual impide que el cuerpo pueda estar en equilibrio. Con esta reducción al absurdo hemos demostrado el siguiente teorema:

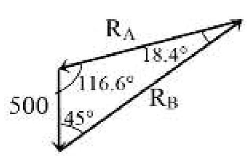
Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a la acción de tres fuerzas, y dos de ellas son concurrentes, la tercera también es concurrente.

Ejemplo. Las barras de la figura tienen peso despreciable y están unidas mediante articulaciones. Determine la magnitud y la dirección de las reacciones en los apoyos A y B.









$$\tan\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 26.6°$$

$$\frac{500}{\text{sen }18.4} = \frac{R_A}{\text{sen }45} = \frac{R_B}{\text{sen }116.6}$$

$$R_A = \frac{500}{\text{sen }18.4}\text{sen }45$$

$$R_B = \frac{500}{\text{sen }18.4}\text{sen }116.6$$

$$\boxed{R_A = 1120\text{ kg} \quad 26.6°}$$

$$\boxed{R_B = 1416\text{ kg} \measuredangle 45°\ (^4)}$$

([4]) Los ángulos, como también advertimos en el prefacio, se expresan en grados sexagesimales redondeados a la primera cifra decimal.

B) Equilibrio de cuerpos sujetos a más de tres fuerzas concurrentes

Para la determinación de las resultantes de más de dos fuerzas concurrentes, recurrimos a la resolución de cada fuerza en sus componentes cartesianas para obtener las componentes cartesianas de la resultante buscada, y luego componíamos estas últimas. Las ecuaciones que nos sirvieron fueron

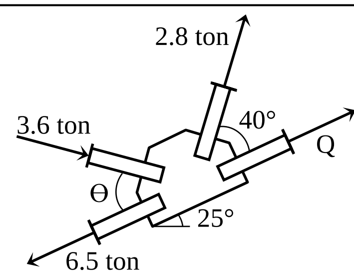
$$Rx = \sum Fx \;\text{ y }\; Ry = \sum Fy$$

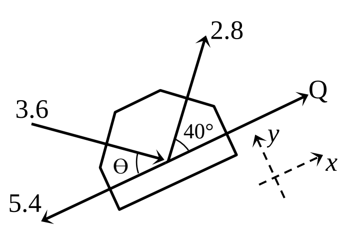
por tanto, las ecuaciones que deberán satisfacer los cuerpos en equilibrio son

$$\sum Fx = 0 \;\text{ y }\; \sum Fy = 0$$

Es decir, la suma algebraica de las componentes de todas las fuerzas del sistema en dos direcciones perpendiculares entre sí debe ser igual a cero.

Ejemplo. La placa-unión de la figura, de peso despreciable, está en equilibrio por la acción de los cuatro perfiles soldados sobre ella. Diga qué fuerza Q debe ejercer el cuarto perfil, y cuál es el valor del ángulo θ.





$$\sum Fy = 0$$
$$2.8 \text{ sen } 40 - 3.6 \text{ sen } \theta = 0$$
$$\text{sen } \theta = \frac{2.8 \text{ sen } 40}{3.6}$$
$$\boxed{\theta = 30°}$$

$$\sum Fx = 0$$
$$Q + 2.8 \cos 40´ + 3.6 \cos 30 - 6.5 = 0$$
$$Q = 6.5 - 2.8 \cos 40 - 3.6 \cos 30$$
$$\boxed{Q = 1.237 \; ton}$$

Equilibrio de los sistemas de fuerzas paralelas

Tuvimos necesidad de emplear dos ecuaciones para determinar la resultante de los sistemas de fuerzas paralela:

$$R = \sum F \text{ y } M_O R = \sum M_O F, \text{ o bien } M_A R = \sum M_A F \text{ y } M_B R = \sum M_B F$$

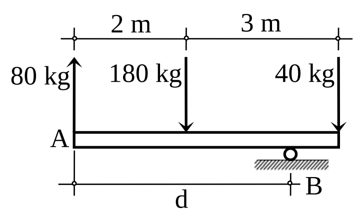
Lo cual implica que, si el sistema de fuerzas se halla en equilibrio, debe cumplir con las dos siguientes ecuaciones:

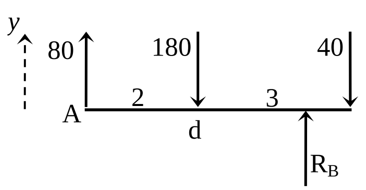
$$\sum F = 0 \text{ y } \sum M_O F = 0, \text{ o bien } \sum M_A F = 0 \text{ y } \sum M_B F = 0$$

lo que quiere decir que la suma algebraica de las fuerzas del sistema es nula, y que la suma de los momentos de todas las fuerzas, con respecto a cualquier punto, es también igual a cero. Pero se pueden emplear las dos últimas ecuaciones, que implican que los momentos de las fuerzas con respecto a dos puntos suman cero, siempre y cuando esos dos puntos no estén contenidos en una línea paralela a las líneas de acción de las fuerzas del sistema.

La ventaja de elegir dos ecuaciones de momentos para la resolución de los problemas es que los resultados que se obtienen son independientes uno del otro.

Ejemplo. La viga de la figura está sujeta a la acción de las tres fuerzas mostradas. Sabiendo que su peso es despreciable, determine la magnitud de la reacción del apoyo B y la distancia *d* a la que se encuentra del extremo A.





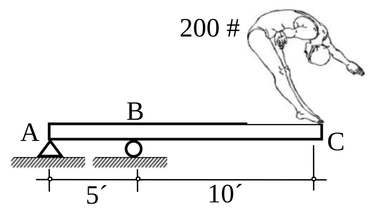
$$\sum F = 0$$

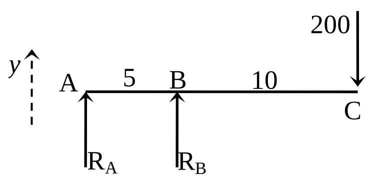
$$R_B + 80 - 180 - 40 = 0$$

$$\boxed{R_B = 140 \text{ kg} \uparrow}$$

$$\sum M_A F = 0$$
$$140\ d - 180(2) - 40(5) = 0$$
$$d = \frac{360 + 200}{140}$$
$$\boxed{d = 4\ \text{m}}$$

Ejemplo. El trampolín de la figura es de peso despreciable. El clavadista pesa 200 libras. Calcule las reacciones en los apoyos A y B.





$$\sum M_B F = 0$$
$$-5\ R_A - 200(10) = 0$$
$$R_A = -400$$

El signo negativo indica que el sentido de la reacción es contrario al del dibujo.

$$\boxed{R_A = 400\ \text{lb}\ \downarrow}$$

$$\sum M_A F = 0$$
$$5\ RB - 200(15) = 0$$
$$\boxed{R_B = 600\ \text{lb}\ \uparrow}$$

Como empleamos dos ecuaciones de momentos, el segundo resultado no depende del primero.

Podemos comprobar de la siguiente manera:

$$\sum Fy = 0$$
$$-400 + 600 - 200 = 0$$
$$200 = 200$$

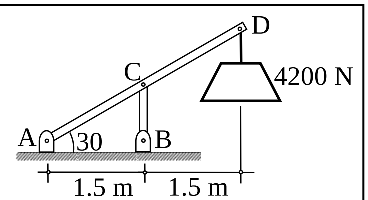
Como se aprecia en el problema anterior, aunque el apoyo *A* sea una articulación, la reacción no tiene componente horizontal, pues no actúa sobre el traínpolín ninguna otra fuerza que la compense para mantener el equilibrio. Podemos generalizar esta observación, estableciendo el siguiente corolario del teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas.

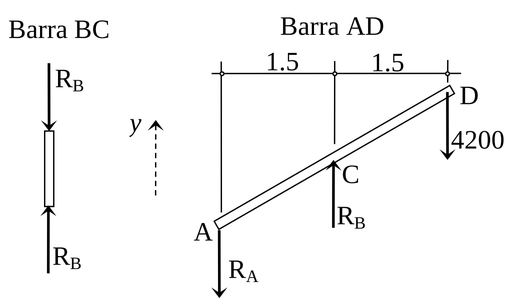
Corolario (del teorema del cuerpo sujeto a tres fuerzas)

Si un cuerpo en equilibrio está sujeto solamente a la acción de tres fuerzas, y dos de ellas son paralelas, la tercera también es paralela.

Otra manera de visualizar este corolario es que si la tercera fuerza no fuera paralela a las otras dos, concurría con ambas, y estaríamos en el caso de tres fuerzas, de las cuales dos son concurrentes.

Ejemplo. La ménsula de la figura está formada por dos barras de peso despreciable, unidas por articulaciones. Determine las reacciones de los apoyos *A* y *B*.





$$\sum M_B F = 0$$

$$1.5\ R_A - 4200\ (1.5) = 0$$

$$\boxed{R_A = 4200\ \text{N}\ \downarrow}$$

$$\sum M_A F = 0$$

$$1.5 R_B - 4200\ (3) = 0$$

$$\boxed{R_B = 8400\ \text{N}\ \uparrow}$$

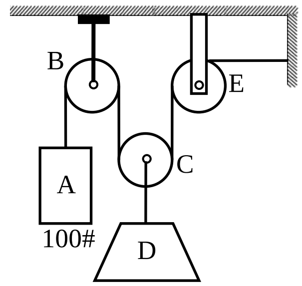
Comprobación:

$$\sum F_y = 0$$

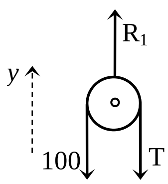
$$-4200 + 8400 = 4200$$

$$4200 = 4200$$

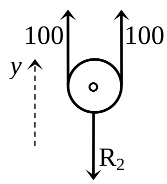
Ejemplo. Los cuerpos de la figura están en reposo y *A* pesa 100 lb. Sabiendo que las cuerdas y las poleas son ideales (de peso despreciable, inextensible aquélla, sin fricción en los pernos éstas), calcule el peso del cuerpo *B* y la reacción del perno sobre la polea E.

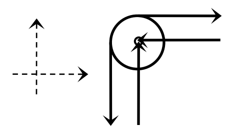


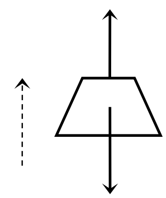
Polea B



Polea C







$\sum M_O F = 0$

$100\,r - Tr = 0$

$T = 100$

$\sum F_y = 0$

$R_1 - 200 = 0$

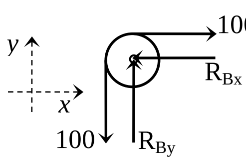
$R_1 = 200\ lb \uparrow$

$\sum F_y = 0$

$100 + 100 - R_2 = 0$

$R_2 = 200\ lb \downarrow$

Polea E



$\sum F_x = 0$

$100 - \mathrm{R_{Bx}} = 0$

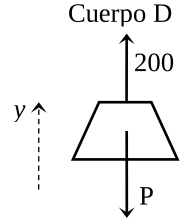
$\mathrm{R_{Bx}} = 100$

$\mathrm{R_{By}} = 100$

$R_B = \sqrt{100^2 + 100^2} = 100\sqrt{2}$

$\boxed{R_B = 141.4\ lb \ \nwarrow 45°}$

Cuerpo D



Puesto que es un cuerpo sujeto a dos fuerzas

$\boxed{P = 200\ lb \uparrow}$

Equilibrio de los sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas

Estudiaremos a continuación el caso más general de los sistemas de fuerzas cuyas líneas de acción estén contenidas en el mismo plano; todos los anteriores son casos particulares.

La completa determinación de la resultante de un sistema de fuerzas no concurrentes ni paralelas se logra mediante las tres siguientes ecuaciones:

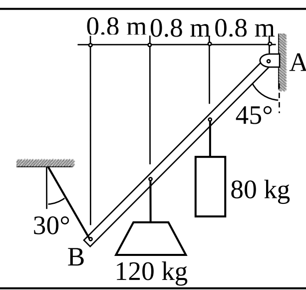
$$Rx = \sum Fx, \quad Ry = \sum Fy \quad \text{y} \quad MoR = \sum MoF$$

de modo que si un sistema de fuerzas está en equilibrio debe satisfacer las tres siguientes:

$$\sum Fx = 0, \quad \sum Fy = 0 \ \text{ y } \ \sum MoF = 0$$

Así como en el caso del equilibrio de las fuerzas paralelas, la ecuación de la suma algebraica de las fuerzas se puede sustituir por una de momentos, también para la resolución de problemas de equilibrio de sistemas de fuerzas no concurrentes ni paralelas las ecuaciones de proyecciones se pueden cambiar por ecuaciones de momentos. Si se eligen dos ecuaciones de momentos, los puntos respecto a los cuales se midan no deben estar contenidos en una línea paralela al eje de las proyecciones cuya ecuación se ha de utilizar. Y si se opta por tres ecuaciones de momentos, los centros no deben estar alineados. Todo esto porque no resultarían ecuaciones independientes y el problema no se podría resolver.

Ejemplo. La barra de la figura es de peso despreciable. Calcule la tensión de la cuerda y la magnitud y dirección de la reacción de la articulación *A*.

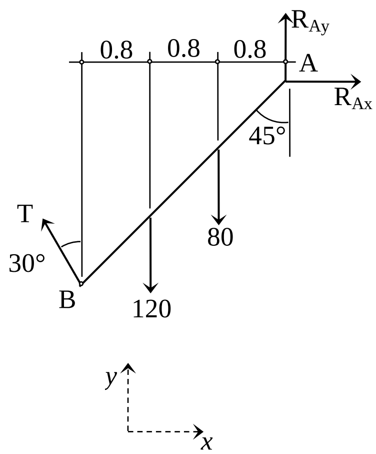


$$\sum M_A F = 0$$

$$80(0.8) + 120(1.6) - \frac{T}{2}(2.4) - \frac{T\sqrt{3}}{2}(2.4) = 0$$

$$1.2T\left(1 + \sqrt{3}\right) = 64 + 192$$

$$\boxed{T = 78.1 \text{ kg}}$$



$$\sum Fx = 0$$

$$-78.1\left(\frac{1}{2}\right) + R_{Ax} = 0$$

$$R_{Ax} = 39.04$$

$$\sum Fy = 0$$

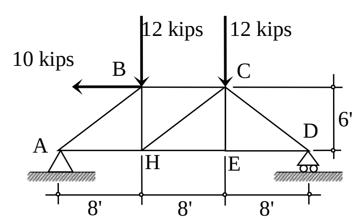
$$78.1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 120 - 80 + R_{Ay} = 0$$

$$R_{Ay} = 132.4$$

$$R_A = \sqrt{39.04^2 + 132.4^2};\ \tan\theta = \frac{132.4}{39.04}$$

$$\boxed{R_A = 138 \text{ kg} \measuredangle 73.6°}$$

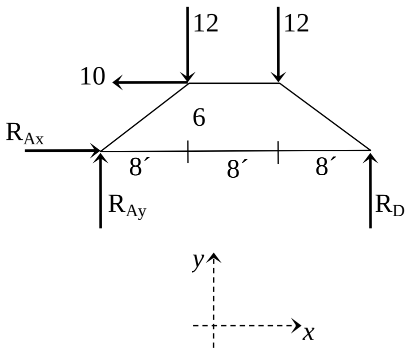
Ejemplo. La figura representa una armadura plana articulada; es decir, los ejes de las barras, cuyos pesos se consideran despreciables, están contenidos en el mismo plano y todas las uniones son articulaciones. Determine las reacciones en los apoyos.



$$\sum M_A F = 0$$

$$24R_D - 12(16) - 12(8) + 10(6) = 0$$

$$R_D = \frac{192 + 96 - 60}{24} = \frac{228}{24}$$



$$\boxed{R_D = 9.5\text{ kips } \uparrow}$$

$$\sum Fx = 0$$

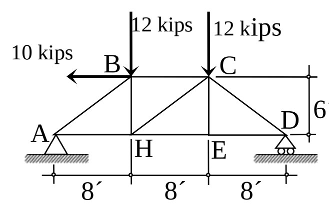
$$R_{Ax} - 10 = 0$$
$$R_{Ax} = 10$$

$$\sum Fy = 0$$

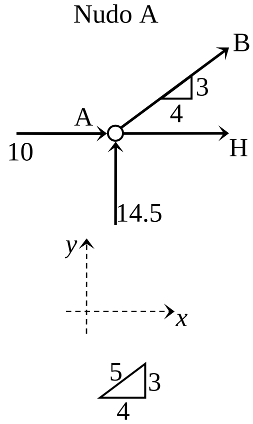
$$R_{Ay} - 12 - 12 + 9.5 = 0$$
$$R_{Ay} = 14.5$$

$$R_A = \sqrt{10^2 + 14.5^2}$$
$$\tan\theta = \frac{14.5}{10}$$
$$\boxed{R_A = 17.61\text{ kips } \measuredangle\ 55.4°}$$

Ejemplo. Puesto que los miembros de la armadura del problema anterior tienen peso despreciable, cada barra es un cuerpo sujeto a dos fuerzas. Calcule la fuerza y tipo de esfuerzo a que están sujetas las barras *AB*, *AH*, *BC* y *BH*.



Nudo A



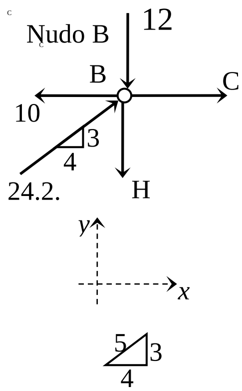
$$\sum Fy = 0$$

$$14.5 + AB\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

$$AB = -14.5\left(\frac{5}{3}\right) = -24.2$$

El signo negativo indica que la fuerza tiene sentido contrario al del dibujo y, por tanto, la barra empuja–comprime al nudo A.

$$\boxed{AB = 24.2\text{ kips } (compresión)}$$



$$\sum Fx = 0$$

$$10 + AH - 24.2\left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\boxed{AH = 9.36 \text{ kips } (tensión)}$$

$$\sum Fx = 0$$

$$BC + 24.2\left(\frac{4}{5}\right) - 10 = 0$$

$$BC = -9.36$$

$$\boxed{BC = 9.36 \text{ kips } (compresión)}$$

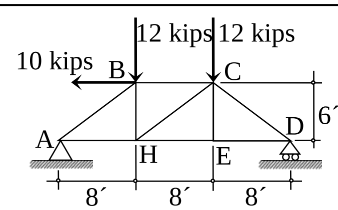
$$\sum Fy = 0$$

$$24.2\left(\frac{3}{5}\right) - 12 - BH = 0$$

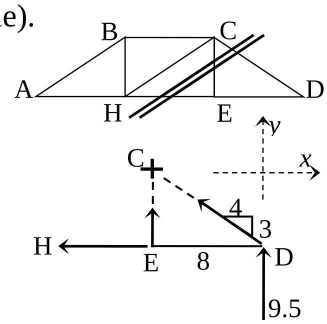
$$\boxed{BH = 2.52 \text{ kips } (tensión)}$$

El método que hemos empleado en la resolución de esta armadura se llama *método de los nudos* (o de las articulaciones).

Ejemplo. Investigue las fuerzas y tipo de esfuerzos que se presentan en las barras *EH*, *CE* y *CD* de la armadura plana de los dos problemas anteriores.



Cortaremos la armadura por las barras que deseamos investigar y dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la sección derecha (porque es la más simple).



$$\sum M_D F = 0$$

$$-4CE = 0$$

$$\boxed{CE = 0}$$

$$\sum Fy = 0$$

$$CD\left(\frac{3}{5}\right)+9.5=0$$

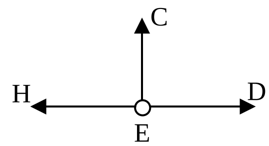
$$\boxed{CD = 15.83 \text{ kips } (compresión)}$$

$$\sum Fx = 0$$

$$15.83\left(\frac{4}{5}\right)-EH=0$$

$$\boxed{EH = 12.67 \text{ kips } (tensión)}$$

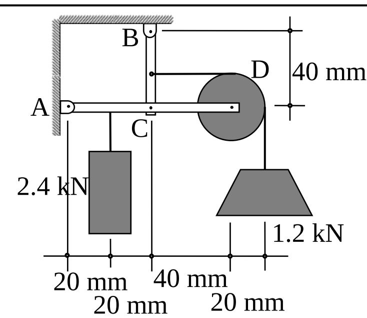
Se puede constatar que la barra CE es de esfuerzo nulo, observando el nudo E:



Como las barras *EH* y *DH* son colineales ejercen necesariamente fuerzas iguales, pero de sentido contrario y la barra *CE* no puede ejercer ninguna, pues el nudo dejaría de estar en equilibrio.

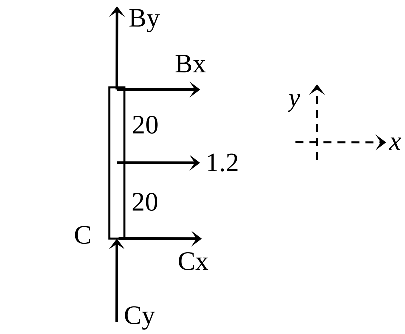
Para este problema hemos empleado ahora otro método de resolución de armaduras que se denomina *método de las secciones.* Los dos métodos ilustrados se fundamentan en el teorema de cuerpo sujeto a dos fuerzas, ya que todas las barras están en ese caso.

Ejemplo. Las barras y la polea del marco de la figura son de peso despreciable y están unidas mediante articulaciones. Determine las reacciones en los apoyos, *A* y *B*.



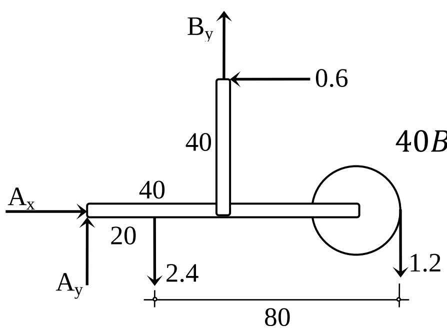
Si dibujáramos el diagrama de un cuerpo libre de todo el marco, aparecerían cuatro incógnitas, y no podríamos encontrar ninguna de ellas.

Comenzaremos, por tanto por la barra BC



$$\sum McF = 0$$
$$-40Bx - 1.2(20) = 0$$
$$Bx = -0.6$$

Ahora, el diagrama de cuerpo libre del conjunto con sólo tres incógnitas



$$\sum M_A F = 0$$
$$40B_y + 0.6(40) - 1.2(100) - 2.4(20) = 0$$
$$40B_y = 144$$
$$B_y = \frac{144}{40} = 3.6$$
$$\sum F_x = 0$$
$$A_x - 0.6 = 0$$
$$A_x = 0.6$$
$$\sum F_y = 0$$
$$A_y - 2.4 + 3.6 - 1.2 = 0$$
$$A_y = 0$$

Comparando las reaccione

$$\boxed{R_A = 0.6 \text{ kips } \rightarrow}$$

$$R_B = \sqrt{0.6^2 + 3.6^2}; \tan\theta = \frac{3.6}{0.6}$$
$$\boxed{R_B = 3.65 \text{ kips } \nwarrow 80.5°}$$

Serie de ejercicios de Estática
EQUILIBRIO

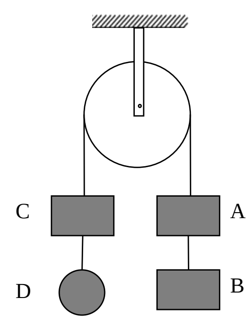
1. ¿Es el movimiento de la Tierra una manifestación del equilibrio del sistema de fuerzas externas que actúa sobre ella?

(*Sol*. No)

2. Si en un problema de equilibrio, el número de incógnitas es mayor que el de ecuaciones independientes de equilibrio, ¿tendrá alguna solución determinada el problema?

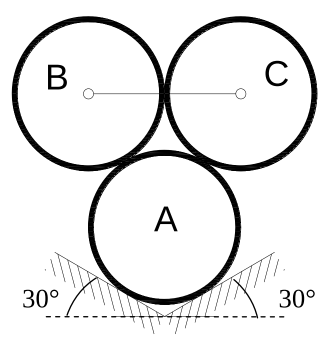
(*Sol*. No)

3. Dos cuerpos *A* y *B* pesan, respectivamente 83 y 62 kilogramos, y equilibran a otros dos, *C* y *D*, como se muestra en la figura. Sabiendo que *C* pesa 120 kilogramos y que los cuerpos están unidos mediante una cuerda de peso despreciable que pasa por los centros de gravedad de todos ellos, calcule el peso de *D* y la tensión en cada tramo de la cuerda.



(*Sol*. P_D = 25 kg; T_{AB} = 62 kg;
T_{BC} = 145 kg; T_{CD} = 25 kg)

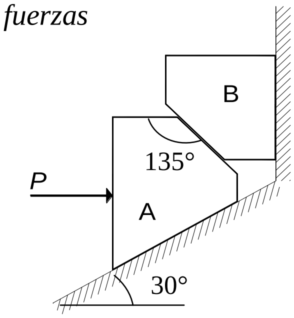
4. Tres cilindros iguales de 2 pies de diámetro y de 70 libras de peso, están colocados como se indica en la figura. Considerando lisas todas las superficies y que no existe ninguna fuerza de contacto entre los cilindros *B* y *C*, ¿cuál es la tensión de la cuerda que une *B* con *C*, y cuáles las reacciones de los planos sobre el cilindro *A*?



(*Sol*. T = 40.4 lb; R_1 = 121.2 lb $\measuredangle$ 60°;
R_2 = 121.2 lb $\measuredangle$ 60°)

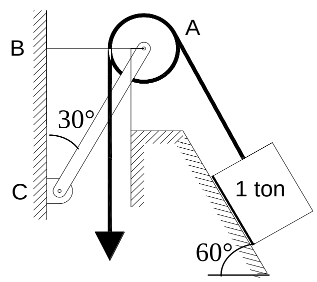
5. La fuerza horizontal P de la figura es de 100 libras y empuja a A para mantener en equilibrio a los dos cuerpos. Si A pesa 50 libras y todas las superficies en contacto son lisas, ¿cuánto pesa B?

(*Sol*. 45 lb)



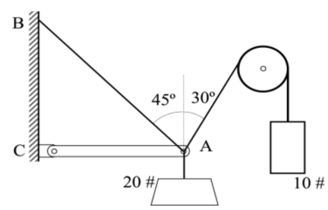
6. Mediante una polea A se suben cargas sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura. Suponiendo que el plano es liso, determine la tensión T del cable AB y la compresión Q de la barra AC cuando una caja de 1 tonelada está subiendo con velocidad constante.

(T = 1.366 ton; Q = 1.866 ton)



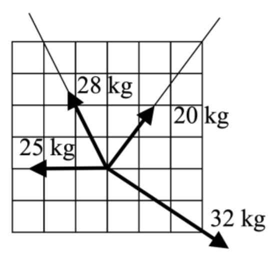
7. Determinar la tensión T del cable AB y la compresión C de la barra AC del mecanismo de la figura, sin considerar sus pesos propios de los elementos.

(*Sol*. T = 16 lb; C = 6.34 lb)



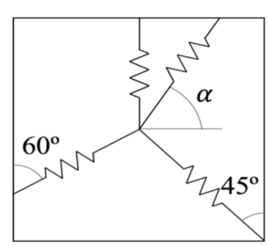
8. ¿Cuál es la fuerza única que puede equilibrar a las cuatro que se muestran en el tablero?

(*Sol*. 23.3 kg; 87.3°)



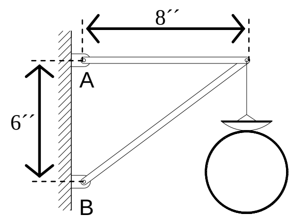
9. Si las magnitudes de las fuerzas que tres de los resortes ejercen sobre A son de 25 kg cada una, ¿cuál debe ser el ángulo α y cuál la magnitud de la fuerza ejercida por el resorte atado a B para que se mantenga el equilibrio?

(*Sol*. α = 120°; 48.3 kg (ó α = 330°; 0 kg))



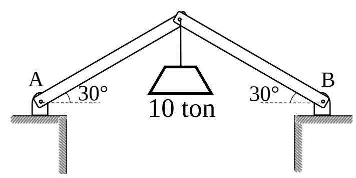
10. Si la lámpara de la figura pesa 27 lb, ¿cuáles son las reacciones en las articulaciones A y B?

(*Sol*. R_A = 36 lb ←; R_B = 45 lb ↗ 36.9°)



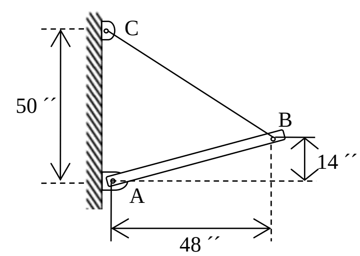
11. Calcular las reacciones en los apoyos *A* y *B* de la estructura, cuando se encuentra bajo condiciones de carga que se indica. El peso de las barras es despreciable.

(*Sol*. R_A = 10 ton ↗ 30°;
R_B = 10 ton ↖ 30°)



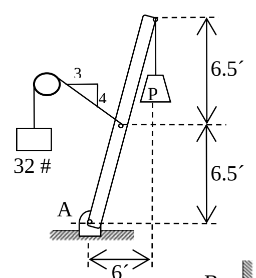
12. Una barra homogénea que pesa 150 lb está articulada en *A* y atada a una cuerda en *B*, como se muestra en la figura. Calcular las magnitudes de las reacciones en *A* y *C*.

(*Sol*. R_A = 120 lb; R_C = 90 lb)



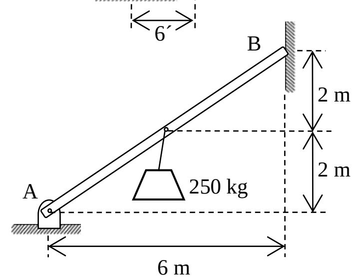
13. Calcular la reacción en la articulación *A* y el peso *P* del cuerpo que mantiene a la barra de la figura en equilibrio, sin considerar su peso propio.

(*Sol*. R_A = 20.8 lb; ↗ 22.7°; P=33.6 lb)



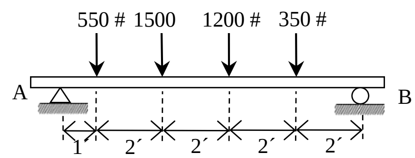
14. Si la viga de la figura y la pared en que se recarga son lisas, calcular la reacción en la articulación y en la pared, despreciando el peso de la viga.

(*Sol*. R_B = 187.5 kg ←;
R_A = 312 kg ↗ 53.0°)



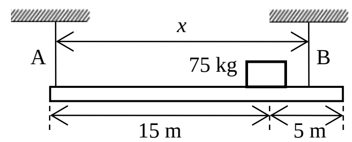
15. Calcular las reacciones en los apoyos *A* y *B* de la viga, de peso despreciable, que soporta las cuatro fuerzas mostradas.

(*Sol*. $R_A = 2100$ lb $\uparrow$; $R_B = 1500$ lb $\uparrow$)



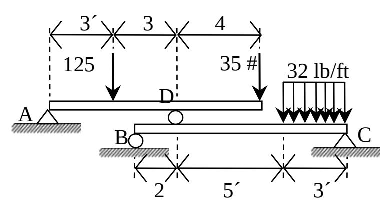
16. Si el peso de la viga de la figura es de 200 kg, el de la caja 75, y la tensión que debe soportar la cuerda *A* es de 100 kg, ¿cuál debe ser la tensión de la cuerda *B* y a qué distancia *x* de *A* debe colocarse para que el conjunto se mantenga en equilibrio?

(*Sol*. $T_A = 175$ kg; $x = 17.85$ m $\rightarrow$)



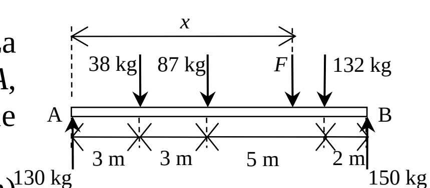
17. Calcular las reacciones de los apoyos *A*, *B*, *C*, y *D* de las vigas de peso despreciable que se muestran en la figura.

(*Sol*. $R_A = 39.2$ lb $\uparrow$; $R_B = 111$ lb $\uparrow$;
$R_C = 105.7$ lb $\uparrow$; $R_D = 120.8$ lb $\uparrow$)



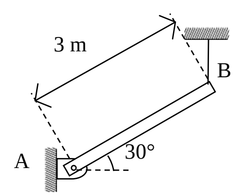
18. Calcule la magnitud *F* de la fuerza y la distancia x a la que se encuentra de *A*, si la viga mostrada tiene peso despreciable y se encuentra en equilibrio.

(*Sol*. F = 23 kg; *x* = 6 m)



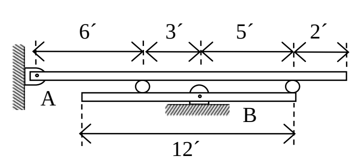
19. Si el peso de la viga homogénea *AB* de la figura es de 21 kg, ¿cuál es la reacción en la articulación *A*, y cuál la tensión *T* de la cuerda que la sujeta en *B*?

(*Sol*. $R_A = 10.5$ kg $\uparrow$; T = 10.5 kg)



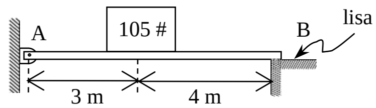
20. Sabiendo que la viga articulada en A pesa 235 lb y la articulada en B, 100, ¿cuáles son las reacciones en dichas articulaciones?

(*Sol*. $R_A = 37.4$ lb $\uparrow$; $R_B = 298$ lb $\uparrow$)



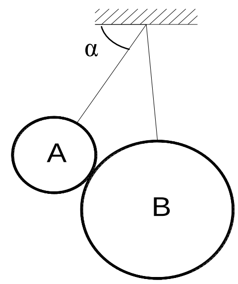
21. El peso de la viga *AB* de la figura es despreciable y el de la caja es de 105 lb. ¿Cuáles son las reacciones en los apoyos?

(*Sol*. R_A = 60 lb↑; R_B = 45 lb↑)



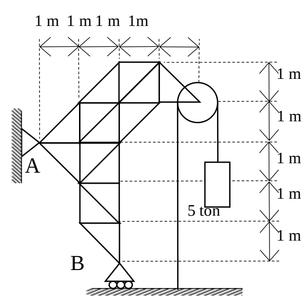
22. Dos esferas *A* y *B*, cuyos radios y pesos respectivos son 1 m y 200 kg, y 2 m y 500 kg, están colgadas de un techo mediante cuerdas iguales de 3 m como se ve en la figura. ¿Cuánto mide el ángulo α? ¿Cuál es la tensión en cada una de las cuerdas?

(*Sol*. α = 61.8°; T_A = 176.5 kg; T_B = 553 kg)



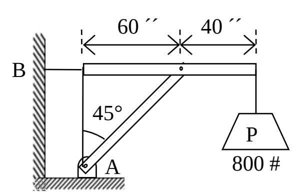
23. Sin considerar los pesos propios de la armadura mostrada y de la polea, calcule las reacciones en los apoyos *A* y *B*.

(*Sol*. R_A = 10 ton↓ ; R_B = 20 ton↑)

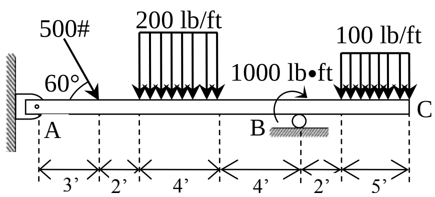


24. Si el peso del cuerpo *P* es de 800 lb, como se muestra en la figura, ¿cuál es la reacción en el apoyo *A*, y cuáles las tensiones T_A de la cuerda atada en *A*, y T_B de la que está sujeta en *B*? El peso de las barras es despreciable.

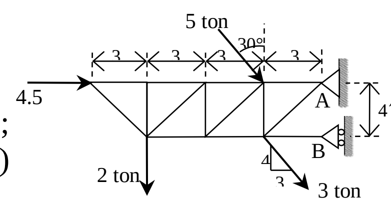
(*Sol*. T_A = 533 lb; T_B = 1333 lb; R_A = 1555 lb; $\measuredangle$ 31.0°)



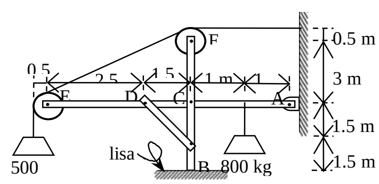
25. Calcular las reacciones en los apoyos de la viga sujeta a las condiciones de carga mostradas, despreciando el peso propio de la viga.
(*Sol*. R_A = 517 lb, 61.1°; R_B = 1281 lb ↑)



26. Calcule las reacciones de los apoyos A y B de la armadura de la figura. Desprecie el peso de la armadura.
(*Sol*. R_A = 9.10 ton, 73.8°;
R_B = 11.36 ton ⟵)



27. Despreciando los pesos propios de los miembros de la armazón mostrada en la figura, calcular las reacciones en los apoyos A y B.
(*Sol*. R_A = 522 kg, 16.7°;
RB = 1150 kg ↑)



28. Calcule las reacciones en los apoyos A y B y todas las fuerzas externas a que está sujeta la barra AECF de la arma-zón que se ilustra en la figura. Los pesos propios de las barras y de las poleas son despreciables.
(*Sol.* R_A=792 kg 2.26º; R_B=890 kg 27.2º; R_C=1112 kg 44.6º; R_E = 530 kg 45º; R_F=530 kg 45º)